

שאלה 1 (20 נק') – מריו והמפלצות

יש N משבצות שמוסדרות בשורה משמאל לימין. מריו עומד על משבצת מספר 1 (השמאלית ביותר) והוא רוצה להגיע למשבצת ה- N (הימנית ביותר). בכל תור מריו עושה צעד שבו הוא קופץ ימינה מרחק של משבצת אחת, שתיים או שלוש לבחירתו. כל צעד של מריו אורך שנייה אחת. מריו יוצא לדרך בזמן 0. אסור לו להישאר במקום, ואסור לו לחרוג מטווח המשבצות: $1, 2, 3, \dots, N$.

מתחת לחלק מהמשבצות יש מפלצות. המפלצות ישנות רוב הזמן. לכל מפלצת יש זמן מחזור שקובע באילו שניות היא ערה: למשל, מפלצת עם זמן מחזור 5 ערה פעם ב-5 שניות - היא מתעוררת לרגע בשניות 5, 10, 15 וכו'. זמן המחזור של כל מפלצת הוא מספר שלם בין 2 ל-5.

אם מריו ינחת על משבצת של מפלצת בדיוק בשנייה שהיא ערה, היא תאכל אותו. אם לא, היא תחזור לישון. אם הוא ינחת על משבצת כשהמפלצת שם ישנה, היא תמשיך לישון והוא יוכל להמשיך בדרכו. גם במשבצת ה- N תיתכן מפלצת (שעלולה לאכול אותו אם תהיה ערה בשניה שמגיע אליה).

המטרה היא לחשב בכמה דרכים שונות מריו יכול להגיע ממשבצת 1 ל- N מבלי להיאכל.

על כל משבצת שבה חיה מפלצת, כתוב זמן המחזור של המפלצת הזאת. אם במשבצת כלשהי אין מפלצת, כתוב עליה 1. לדוגמה, נניח ש- $N=6$, וסדרת זמני המחזור היא:



2	-1	2	3	4	2
---	----	---	---	---	---

שימו לב שמריו לא יכול לקפוץ בהתחלה משבצת 1 ימינה ואז שוב 1, כי אז הוא ינחת על המפלצת במשבצת השלישית משמאל בזמן 2 והיא תאכל אותו (היא בדיוק תהיה ערה כשינחת, כי היא מתעוררת כל 2 שניות). כמו כן, מריו לא יכול לקפוץ 2, ואז 1, ואז שוב 1 ואז שוב 1, כי אז הוא יגיע למשבצת האחרונה בשניה 4 והמפלצת שם, שמתעוררת כל 2 שניות, תהיה ערה בשניה הזו.

לעומת זאת, מריו כן יכול לקפוץ 3 ואז 1 ואז שוב 1, וכך יגיע למשבצת הימנית בבטחה. להלן כל הדרכים שיש למריו להגיע ליעדו מבלי להיאכל:

- קפיצה של 1, ואז 2, ואז 2.
- קפיצה של 1, ואז 3, ואז 1.
- קפיצה של 2, ואז 1, ואז 2.
- קפיצה של 2, ואז 2, ואז 1.
- קפיצה של 3, ואז 1, ואז 1.

בסך הכל יש 5 דרכים שונות.

עליכם לכתוב תכנית אשר הקלט שלה הוא המספר N , ואחריו N המספרים שמייצגים את זמני המחזור של המפלצות במשבצות, לפי הסדר (משמאל לימין). פלט התכנית הוא מספר הדרכים השונות של מריו להגיע מ-1 ל- N מבלי להיאכל. עבור הסדרה שבדוגמה הפלט יהיה 5, כפי שמפורט לעיל. ייתכן שאין למריו אף דרך להגיע למשבצת ה- N מבלי להיאכל ואז הפלט יהיה 0.

הניחו ש- N הוא בין 10 ל-100,000, וכל זמני המחזור הם בין 2 ל-5 (או -1, שמציין שאין מפלצת).

שאלה 2 (25 נק') – משחק אסימונים

נתונה ערימה של N אסימונים. N אי-זוגי. שני שחקנים משחקים משחק שבו כל שחקן לוקח בתורו אסימונים. בכל תור, לוקח כל שחקן אסימון אחד, או 2 אסימונים, או 5, או 6 אסימונים, כרצונו (בתורים שונים של שחקן, הוא יכול לקחת כמויות שונות של אסימונים). המשחק מסתיים כאשר לא נותרים יותר אסימונים בערימה. עם סיומו יהיה אצל אחד השחקנים מספר אי-זוגי של אסימונים, ואצל השני - מספר זוגי של אסימונים (זאת, כיון שמספר האסימונים התחילי אי-זוגי). מנצח השחקן אשר בסיום המשחק מספר האסימונים שברשותו הוא אי-זוגי.

לדוגמה, אם $N=3$ בתחילת המשחק, השחקן הראשון, שפותח במשחק, יכול לקחת בתורו הראשון אסימון אחד או שני אסימונים. אם ייקח שניים - ייקח השחקן השני אחד, וינצח. אם ייקח אחד - ייקח השחקן השני גם הוא אחד, ואז יאלץ השחקן הראשון לקחת את האחד הנותר, ושוב - ינצח השחקן השני. לכן, עבור $N=3$ כדאי להיות השחקן שאִיננו פותח במשחק. לעומת זאת, ברור שעבור $N=1$ כדאי להיות השחקן שפותח במשחק.

עליכם לכתוב תכנית אשר תשחק מול משתמש, כאשר התכנית היא אחד השחקנים והמשתמש הוא השחקן האחר. בהתחלה, התכנית תקבל כקלט את גודל ערימת האסימונים N . מיד לאחר מכן, התכנית תודיע האם היא רוצה להיות השחקן הראשון (הפותח במשחק) או השחקן השני. לאחר מכן, התכנית תודיע בכל תור שלה את מספר האסימונים שהיא לוקחת בתורה. בכל תור של המשתמש, התכנית תקלוט ממנו את המהלך שלו. על תכניתכם לשחק לפי אסטרטגיה שתוביל אותה תמיד לניצחון (כלומר, ניצחון עבור כל ערך תחילי אי-זוגי של N). הניחו ש- N הוא מספר אי-זוגי בין 10 ל-1,000,000.

לפני כתיבת התכנית עליכם לתאר בצורה ברורה וחד-משמעית את אסטרטגיית הניצחון של התכנית, ולהצדיק אותה, כלומר - להסביר בצורה משכנעת מדוע תכניתכם תמיד תנצח.

שאלה 3 (25 נק') – מרחק מירבי בין נתונים

נתונה רשימה של N מספרים שלמים חיוביים. נגדיר *מרחק* בין שני מספרים ברשימה כהפרש בין המקומות של שני המספרים ברשימה. למשל, ברשימה נתונה, המרחק בין המספר במקום השני למספר במקום השישי הוא 4. רוצים לחשב שני מרחקים:

- א.** המרחק המירבי בין שני מספרים שונים, אשר כל המספרים במקומות שביניהם קטנים משניהם.
ב. המרחק המירבי בין שני מספרים שווים, אשר כל המספרים במקומות שביניהם קטנים מהם. התשובה תהיה 0, עבור סעיף, אם אין בכל הרשימה שני מספרים אשר מקיימים את התנאי שבסעיף.

לדוגמה, עבור הרשימה הבאה:

4	5	2	5	5	8	3	2	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---

התשובה לחלק א' היא 3. היא מתקבלת מן המרחק בין ה-8 שבמקום השישי לבין ה-4 שבמקום התשיעי, שביניהם רק מספרים קטנים משניהם. התשובה לחלק ב' תהיה 2, והיא מתקבלת מן המרחק בין ה-5 במקום השני לבין ה-5 במקום הרביעי.

עבור הרשימה הבאה:

1	2	3	4	5	6	7	8	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---

התשובה לחלק א' תהיה 1 (רק זוגות סמוכים מקיימים את התנאי), והתשובה לחלק ב' תהיה 0.

עליכם לכתוב תוכנית אשר **הקלט** שלה הוא המספר N , ואחריו רשימה של N מספרים שלמים חיוביים, ול**פלט** שלה שני חלקים:

- א.** (10 נקודות) המרחק המירבי בין שני מספרים שונים, אשר כל המספרים במקומות שביניהם ברשימה קטנים משניהם.
ב. (15 נקודות) המרחק המירבי בין שני מספרים שווים, אשר כל המספרים במקומות שביניהם ברשימה קטנים מהם.

הניחו ש- N הוא בין 10 ל-100,000, וכל אחד מן המספרים ברשימה הוא בין 1 ל-1,000,000,000.

שאלה 4 (30 נק') – תת-סדרה מגניבה ארוכה ביותר

עבור סדרה באורך אי-זוגי $2M+1$ של מספרים, החציון של הסדרה הוא המספר שלפחות $M+1$ מאיברי הסדרה גדולים ממנו או שווים לו ולפחות $M+1$ מאיברי הסדרה קטנים ממנו או שווים לו. במילים אחרות, החציון הוא המספר שאילו היינו ממיינים את סדרת המספרים, הוא היה בדיוק באמצע. לדוגמה, החציון של הסדרה

7	10	2
---	----	---

הוא 7, והחציון של הסדרה

1	5	5	4	4	6	6	6	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---

הוא 5.

נתונה סדרת מספרים שלמים A , שאורכה N . בנוסף, נתון המספר השלם K . תת-סדרה (רצופה) B של A נקראת **מגניבה** אם האורך של B הוא אי-זוגי וגם החציון של B הוא לפחות K . המטרה בשאלה היא למצוא תת-סדרה מגניבה של A שאורכה מקסימלי.

לדוגמה, נניח ש- $N=10$ ו- $K=5$ והסדרה A היא הסדרה הבאה:

5	4	1	3	2	9	3	7	3	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

אז התת-סדרות המגניבות של A הן:

- 5 (שהחציון שלה הוא 5)
- 9 (החציון – 9)
- 9,3,7 (החציון – 7)
- 9,3,7,3,6 (החציון – 6)
- 7 (החציון – 7)
- 7,3,6 (החציון – 6)
- 6 (החציון – 6)

התת-סדרה המגניבה הארוכה ביותר היא 9,3,7,3,6 שאורכה 5. שימו לב, שלמשל התת-סדרה 3,2,9,3,7,3,6 אינה מגניבה, כי החציון שלה הוא 3, וזה פחות מ- K .

עליכם לכתוב תכנית אשר **הקלט** שלה הוא המספר N , אחריו המספר K , ואחריו N המספרים בסדרה A לפי הסדר. **פלט** התכנית הוא האורך של התת-סדרה המגניבה הארוכה ביותר ב- A .

למשל, עבור הסדרה A שבדוגמה, הפלט של התכנית צריך להיות 5, כי זה האורך של התת-סדרה המגניבה הארוכה ביותר 9,3,7,3,6.

הניחו ש- N הוא בין 10 ל-1,000,000, ו- K בין 1 ל-1,000,000,000.