



האולימפיאדה במדעי המחשב, שלב א', 2022

מועד ב'

שאלה 1

כשעושים K חתכים מקבלים $K+1$ מקטעים. כמובן שאת המקטעים נסדר במסדר לפי סדר מילוני, מהגדול לקטן.

א. לגולדן מותר לעשות 2 חתכים?

אי אפשר להתחיל ב-9, כי בשביל זה נצטרך לכתוב מ-2 הצדדים של אחד מה-9 ובצד ימין של השני, כלומר 3 חתכים לכל הפחות. יש 2 דרכים להתחיל עם 98, לחתוך מ-2 הצדדים של ה-9 הראשון או של השני. כמובן עדיף של השני, כי אז נקבל בהתחלה 989 ולא 995.

8 9 3 7 | 9 | 5 4 7 8 3 2 5

989375478325

ב. לגולדן מותר לעשות 3 חתכים?

8 | 9 | 3 7 | 9 5 4 7 8 3 2 5

995478325837

(אם היינו חותכים ב-2 הצדדים של ה-9 השני ומימין לראשון, היינו מקבלים בהתחלה 993, שזה פחות טוב)

ג. לגולדן מותר לעשות 4 חתכים?

8 | 9 | 3 7 | 9 | 5 4 7 8 3 2 5

998547832537

שאלה 2

אפשר להתחיל מהסוף, לשמור לכל קופסה כמה פירות אפשר לאכול אחריה אם אפשר להתחיל לאכול החל מקופסה זו. עבור קופסה עם N פירות, זו המקסימום בין התשובה שחישבנו עבור הקופסה הקודמת (הבאה מימין, אם לא פותחים את הקופסה הנוכחית), לבין מספר הפירות בקופסה הנוכחית + התשובה החל מ- N קופסאות קדימה.

א. ימין 3 5 2 1 3 2 1 6 7 9 2 1 2 שמאל

12 11 10 9 8 8 8 7 6 5 3

תשובה: 12

ב. ימין 1 5 1 1 6 2 3 8 1 1 1 4 שמאל

15 14 13 12 11 11 10 9 7 7 6 5 1

תשובה: 15

ג. ימין 8 19 7 1 1 1 1 2 1 2 9 6 3 3 1 7 שמאל

27 27 26 25 24 23 22 20 20 19 18 17 16 15 14 13 10 10 9

תשובה: 27

ד. ימין 1 3 7 3 7 3 2 2 10 2 2 3 7 3 7 3 1 שמאל

23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 14 12 12 10 10 7 7 7 4 1

תשובה: 23

שאלה 3

מספר התפוחים בכל דקה גדל כמובן פי 3, כי שמים את המשולש מהתור הקודם 3 פעמים ולא מוסיפים עוד תפוחים. אחרי דקה יש 3 תפוחים, ולכן אחרי t דקות יש 3^t תפוחים.

הבסיס של המשולש אחרי דקה הוא עם 2 תפוחים, וכל דקה גדל פי 2. לכן אחרי t דקות יש 2^t פירות בבסיס.

נשים לב שבכל שורה יש פרי אחד פחות מאשר בשורה שמתחתיה. לכן, סה"כ לאחר t דקות מספר הפירות במשולש הוא:

$$1 + 2 + \dots + 2^t = \frac{2^t * (2^t + 1)}{2} = \frac{2^{2t} + 2^t}{2} = 2^{2t-1} + 2^{t-1}$$

מספר התפוזים הוא כמובן מספר הפירות הכולל פחות מספר התפוחים, כלומר $2^{2t-1} + 2^{t-1} - 3^t$.

$$\begin{aligned} \text{א. } & 2^{2*5-1} + 2^{5-1} - 3^5 = 2^{11} + 2^5 - 3^6 = 285 \\ \text{ב. } & 2^{2*10-1} + 2^{10-1} - 3^{10} = 2^{19} + 2^9 - 3^{10} = 465,751 \\ \text{ג. } & 2^{2*15-1} + 2^{15-1} - 3^{15} = 2^{29} + 2^{14} - 3^{15} = 522,538,389 \end{aligned}$$

שאלה 4

למד יש 9 ספרות בכל מיקום, כלומר הוא פשוט פועל בבסיס 9, כש $4 < -5$, $5 < -6$, $6 < -7$, $7 < -8$, $8 < -9$, $9 < -0$, $0 < -1$, $1 < -2$, $2 < -3$.

$$\begin{aligned} \text{א. } & 3 + 2 * 9 + 2 * 9^2 + 1 * 9^3 + 1 * 9^4 + 1 * 9^5 = 539,481 \\ \text{ב. } & 8 + 7 * 9 + 6 * 9^2 + 5 * 9^3 + 4 * 9^4 + 3 * 9^5 + 2 * 9^6 + 1 * 9^7 = 6,053,444 \\ \text{ג. } & 2022 = 224 * 9 + 6 \dots 224 = 24 * 9 + 8 \dots 24 = 2 * 9 + 6 \\ & \text{לכן התשובה היא 2,797. (נזכיר שלספרות אחרי 4 יש להוסיף 1.)} \\ \text{ד. } & 10^6 = 111,111 * 9 + 1 \dots 111,111 = 12345 * 9 + 6 \dots 12345 = 1371 * 9 + 6 \\ & 1371 = 152 * 9 + 3 \dots 152 = 16 * 9 + 8 \dots 16 = 1 * 9 + 7 \\ & \text{לכן התשובה היא 1,893,771.} \end{aligned}$$

שאלה 5

נסמן את התשובה עבור n ב- $f(n)$. במעבר הראשון נוריד את כל הבגנות הזוגיות, לכן עבור n זוגי $f(n) = f(n-1)$. עבור n אי זוגי נשאר עם $\frac{n+1}{2}$ בגנות והבעיה עכשיו זהה לבעיה המקורית עבור הבגנות שנשארו, אם נמספר אותן מהסוף להתחלה מ-1 עד $\frac{n+1}{2}$ ואז נחזור מהתשובה למספור המקורי.

$$n \rightarrow 1, n-2 \rightarrow 2, n-4 \rightarrow 3 \dots n-2(i-1) \rightarrow i$$

כלומר $f(n) = n - 2 \left(f\left(\frac{n+1}{2}\right) - 1 \right) = n + 2 - 2f\left(\frac{n+1}{2}\right)$ עבור n אי זוגי. א. נקבל:

$$\begin{aligned} f(50) &= f(49) = 51 - 2f(25) \\ f(25) &= 27 - 2f(13) \\ f(13) &= 15 - 2f(7) \\ f(7) &= 9 - 2f(4) \end{aligned}$$



$$f(4) = f(3) = 5 - 2f(2)$$
$$f(2) = f(1) = 1$$

ואז נציב הפיך:

$$f(4) = 5 - 2 = 3, f(7) = 9 - 6 = 3, f(13) = 15 - 6 = 9, f(25) = 27 - 18 = 9,$$
$$f(50) = 51 - 18 = 33$$

ב. נקבל:

$$f(2022) = f(2021) = 2023 - 2f(1011) = 673$$

$$f(1011) = 1013 - 2f(506) = 675$$

$$f(506) = f(505) = 507 - 2f(253) = 169$$

$$f(253) = 255 - 2f(127) = 169$$

$$f(127) = 129 - 2f(64) = 43$$

$$f(64) = f(63) = 65 - 2f(33) = 43$$

$$f(32) = f(31) = 33 - 2f(16) = 11$$

$$f(16) = f(15) = 17 - 2f(8) = 11$$

$$(חישבנו בסעיף הקודם בדרך) f(8) = f(7) = 3$$