



דרך אחרת היא להבין שצריך שאחרי ההחלפה יהיו בדיוק 15 תפוחים, כי מכאן נובע שיהיו גם בדיוק 15 בננות. אם מבצעים החלפה ממקום x , התפוחים בסוף יהיו כל התפוחים שהיו לפני המקום x , וכל הבננות שהיו במקום x והלאה (כי ממנו הפירות מתחלפים), ואז אפשר בכל סעיף לרשום לכל מקום כמה תפוחים יש עד אליו (לספור מההתחלה), כמה בננות יש ממנו והלאה (לספור מהסוף), ולבדוק בכמה מהמקומות סכום שני המספרים האלו הוא 15.

																														
0	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	9	9	10	11	12	12	12	12	13		
17	17	17	17	17	17	17	17	16	15	14	13	12	11	11	10	10	9	8	8	7	6	5	5	5	5	4	3	2	1	1
17	18	19	20	21	22	23	22	21	20	19	18	17	18	17	18	17	16	17	16	<u>15</u>	14	<u>15</u>	16	17	16	<u>15</u>	14	13	14	

תשובות סופיות: א. 3, ב. 3, ג. 5, ד. 6

שאלה 3

- א. לכל תוצאה אפשרית של 11 ההטלות הראשוניות – יש רק תוצאה אחד בהטלה ה-12 שתביא לסכום שמתחלק ב-6 – התוצאה שמסלילה את שארית החלוקה ב-6 של סכום 11 ההטלות הראשוניות. אם שארית חלוקה זו היא x , בהטלה השישית חייב לצאת $x - 6$ כדי שהסכום יתחלק ב-6. לכן מספר האפשרויות הוא כמספר התוצאות האפשריות של 11 הטלות קוביות – שזה 6 לכל אחת מהן, סה"כ $6^{11} = 362797056$.
- ב. כדי שמכפלת כל שתיים עשר ההטלות תתחלק ב-10 ללא שארית, צריך שהיא תתחלק ב-2 וב-5, שאלו הגורמים הראשוניים של 10.
- יותר קל לספור מה מספר האפשרויות שבהן זה לא קורה:
- כדי שהמכפלה לא תתחלק ב-5, צריך שלא יצא 5 באף הטלה, כלומר שבכל ההטלות תצא אחת מבין 5 האפשרויות האחרות – סה"כ 5^{12} אפשרויות.
 - כדי שהמכפלה לא תתחלק ב-2, אסור שיצא מספר זוגי באף הטלה, כלומר בכל ההטלות צריך לצאת 1, 3 או 5 – 3 אפשרויות לכל הטלה – סה"כ 3^{12} אפשרויות.
 - אבל ספרנו אפשרויות שלא מתחלקות לא ב-5 ולא ב-2 פעמיים. אילו סדרות הטלות אלו? הסדרות שבהן בכל הטלה אין לא מספר זוגי ולא 5, כלומר יוצא תמיד 1 או 3 – 2^{12} אפשרויות.
 - לכן סה"כ יש $5^{12} + 3^{12} - 2^{12}$ סדרות הטלות שמכפלתן לא מתחלקת ב-10.
- יש בסה"כ 6^{12} סדרות הטלות, לכן מספר הסדרות שמכפלתן כן מתחלקת ב-10 הוא ההפרש:
- $$6^{12} - 5^{12} - 3^{12} + 2^{12} = 1932114366$$

שאלה 4

- א. כדאי לבצע החלפות כמו חנוכיה – בין המקום הראשון לאחרון, השני ללפני האחרון וכו'. כל החלפה תיקח 2 מספרים שלא במקום שלהם ותחזיר את שניהם למקומם, ולכן זה גם הפתרון הטוב ביותר. סה"כ יש 50 זוגות שצריך להחליף (והאמצע כבר בהתחלה במקום הנכון).
- ב. אפשר להביא את המלון הראשון לסוף ע"י החלפה שלו עם המלון השני, ואז של השני עם השלישי, וכו'. זה יוצא $100=101-1$ החלפות. עכשיו נשארנו עם 100 מספרים שממוינים הפוך, וגם שם צריך להביא את 2 לסוף, וזה $100-1=99$ החלפות, ואז 98 החלפות עבור 3 וכו'... סה"כ $1+2+\dots+100=5050$ החלפות.

כדי להוכיח שזה אופטימלי אפשר לספור את מספר זוגות המלוניס כך שהמלון הכבד יותר נמצא משמאל לקל יותר. תחילה זה 5050, וכל החלפה של זוג סמוך יכול להוריד מספר זה רק באחד, לכן אין דרך טובה יותר.

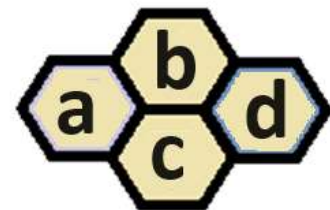
- ג. הפתרון בסעיף א' משתמש רק בהחלפות זוגיות, ולכן גם כאן הוא אופטימלי.
- ד. בסוף כל מלון שהתחיל במקום זוגי צריך גם לסיים במקום זוגי, ולהפך. מצד שני, כל החלפה מחליפה בין מלון במקום זוגי לבין מלון במקום אי-זוגי, לכן צריך לפחות 2 החלפות לכל מלון, למעט מלון 51 שלא צריך לגעת בו (כי הוא כבר נמצא במקומו).
- אכן ניתן להחליף ב-100 החלפות – אפשר לבצע 4 החלפות עבור כל 4 מלוניס באופן הבא:
- נחליף את הראשון והלפני אחרון שלא במקומם (תחילה מלון 1 ו-100).
 - נחליף את השני והאחרון שלא במקומם (תחילה 2 ו-101).
 - נחליף את 2 המלוניס הראשונים שלא במקומם (כעת אלו 1 ו-2).
 - נחליף את 2 המלוניס האחרונים שלא במקומם (כעת אלו 100 ו-101).
 - עכשיו צריך למיין את 3-99, ואפשר לחזור על 4 הפעולות האלו באופן דומה (98-3, 99-4, 99-3, 98-4 וכו').
- ה. במקרה כזה לעולם אי אפשר להחליף בין מספר זוגי למספר אי-זוגי, אז בעצם ניתן להפריד את המספרים הזוגיים והאי-זוגיים, ואם מסתכלים רק על המספרים עם אותה הזוגיות ההחלפות הן כמו החלפות של זוגות סמוכים: נתונים המספרים 1, 3, 5, ..., 101 שצריך לסדר הפוך עם החלפות של זוגות **סמוכים** בלבד, והמספרים 2, 4, ..., 100. כמובן שהבעיות האלו שקולות לבעיה שראינו בסעיף ב', בראשונה ידרשו $1+2+\dots+50=1275$ ובשניה $1+2+\dots+49=1225$ החלפות, ובסה"כ 2500 החלפות.

שאלה 5

נשים לב שהניקוד הסופי של רד הוא ההפרש בין המשבצות שהוא היה בהן לבין המשבצות שגולדן היה בהן. רד רוצה למקסם ערך זה וגולדן למזער ערך זה.

המינימום של רד פחות גולדן = המקסימום של גולדן פחות רד, ולכן בפועל אפשר לכל שחקן להגיד שהניקוד שלו זה המשבצות שהוא היה בהן פחות המשבצות של השחקן השני, ושכל שחקן מנסה למקסם ערך זה, ואז המשחק נהיה סימטרי עבור שני השחקנים 😊

כעת נשים לב, שאפשר ללוח עם 4 משושים לעבור על כל האפשרויות ולהבין כמה נקודות השחקן שמתחיל בלוח זה מקבל:



- השחקן שנכנס ללוח מקבל ישר a נקודות. השחקן השני יכול לעשות אחד מ-2 מהלכים:
- ללכת לימין עליון. במקרה זה ירדו לראשון b נקודות, ואז השחקן הראשון יכול או ללכת ימינה ולקבל d, או ללכת למטה ולקבל c ואז השני ילך ימינה ויוריד d. אז במקרה זה השחקן הראשון יקבל $-b + \max(d, c - d)$.

- ללכת לימין תחתון. בדומה, הניקוד של הראשון יהיה $-c + \max(d, b - d)$.

השחקן השני מנסה להשיג כמה שיותר, לכן הראשון יקבל סה"כ

$$a + \min(-b + \max(d, c - d), -c + \max(d, b - d))$$

כעת נשים לב שבכל לוח כך ניתן להבין כמה ניקוד יקבל זה שמגיע ל-4 המשושים האחרונים. אז אפשר פשוט להחליף אותם במשושה אחד עם הערך הנ"ל. ואז לעשות זאת שוב ושוב, עד שנגיע למשושה אחד עם הניקוד של השחקן הראשון (רד), וזוהי תשובתנו!

לדוגמה, עבור סעיף ד':



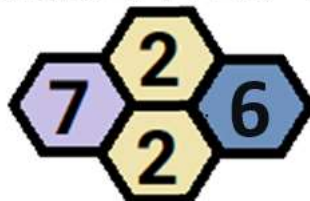
$$2 + \min(-4 + \max(1, 2 - 1), -2 + \max(1, 4 - 1)) = 2 + \min(-3, 1) = -1$$



$$2 + \min(-7 + \max(-1, 3 - (-1)), -3 + \max(-1, 7 - (-1))) = 2 + \min(-3, 5) = -1$$



$$6 + \min(-3 + \max(-1, 4 - (-1)), -4 + \max(-1, 3 - (-1))) = 6 + \min(2, 0) = 6$$



$$7 + \min(-2 + \max(6, 2 - 6), -2 + \max(6, 2 - 6)) = 7 - 2 + 6 = 11$$

באופן דומה בסעיף א' נקבל 6, בב' נקבל -4, ובג' 2.

שאלה 6

נמצא נוסחה רקורסיבית למספר הסידורים של n אשכולות בקופסאות $1 \dots n$, שנסמנו $f(n)$.

הקופסה האחרונה יכולה להיות או עם n ענבים, או עם $n-1$, או עם $n-2$.

1. כמה סידורים קיימים שבהם הקופסה האחרונה היא עם n ענבים, והפרש בין מספר הענבים בכל קופסה לבין המספר של הקופסה יהיה קטן שווה 2? בעצם נשאר לנו לסדר את האשכולות 1 עד $n-1$ בקופסאות 1 עד $n-1$, ויש בדיוק $f(n-1)$ דרכים לעשות זאת!

2. כמה סידורים קיימים שבהם הקופסה האחרונה היא עם $n-1$ ענבים, והפרש בין מספר הענבים בכל קופסה לבין המספר של הקופסה יהיה קטן שווה 2? נפריד לפי מספר הענבים בקופסה 1, שחייב להיות או n , או $n-2$, או $n-3$ (הפרש בין מספר הענבים למספר הקופסה לכל היותר 2, וכבר השתמשנו באשכול עם $n-1$ הענבים):
a. אם n , נשארו לנו הקופסאות $1 \dots n-2$ והאשכולות $1 \dots n-2$, אז $f(n-2)$ דרכים.
b. אם $n-2$, אז הקופסה השלישית מהסוף חייבת להיות עם האשכול n , אחרת האשכול n לא יהיה בהפרש של 2 ממספר הקופסה שלו. אז ישארו האשכולות $1 \dots n-3$ בקופסאות $1 \dots n-3$, כלומר $f(n-3)$ דרכים למקרה זה.

c. אם $n-3$, שוב הקופסה השלישית מהסוף חייבת להיות עם n , ונשארו עם הקופסאות $1 \dots n-4$ והאשכולות $1 \dots n-4$ וגם $n-2$. נשים לב שזה שקול לכל מקרה 2, של האשכולות $1 \dots n-2$ וגם n והקופסאות $1 \dots n-1$, פשוט עם 2 קופסאות ואשכולות פחות.

ניתן להגדיר נוסחת עזר g , כש- $g(n)$ הוא מספר הדרכים לסדר את האשכולות $1 \dots n-1$ ואת האשכול $n+1$ בקופסאות $1 \dots n$, ואז כל מקרה 2 הוא $g(n-1)$, ותת מקרה c הוא $g(n-3)$, ונקבל $g(n-3) = f(n-2) + f(n-3) + g(n-3)$ ונקבל $g(n-1) = f(n-2) + f(n-3) + f(n-4) + f(n-5) + g(n-5) \dots$ ובאופן כללי $g(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$.

3. כמה סידורים קיימים שבהם הקופסה האחרונה היא עם $n-2$ אשכולות, והפרש בין מספר הענבים בכל קופסה לבין המספר של הקופסה יהיה קטן שווה 2? נפריד שוב למקרים לפי מספר הענבים באשכול שבקופסה הלפני אחרונה:

a. אם יש בה $n-1$ ענבים, בקופסה $n-2$ חייבים להיות n ענבים, אז יש $f(n-3)$ דרכים כאלו.

b. אם יש בה n ענבים, נשארו הקופסאות $1 \dots n-2$ והאשכולות $1 \dots n-3$ ו- $n-1$, כלומר יש $g(n-2) = \sum_{i=1}^{n-3} f(i)$ דרכים.

c. אם יש בה $n-3$ ענבים, בקופסה $n-2$ חייבים להיות n ענבים, ובקופסה $n-3$ חייבים לשים את האשכולות עם $n-1$ ענבים, ואז נשארו עם הקופסאות $1 \dots n-4$ והאשכולות $1 \dots n-4$, אז יש $f(n-4)$ דרכים כאלו.

בסה"כ קיבלנו: $f(n) = f(n-1) + \sum_{i=1}^{n-2} f(i) + f(n-3) + \sum_{i=1}^{n-3} f(i) + f(n-4) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i) + f(n-3) + \sum_{i=1}^{n-3} f(i) + f(n-4)$



קל לראות את מקרי הבסיס:

- עבור קופסה אחת ואשכול אחד יש דרך אחת, עבור 2 קופסאות עם 2 אשכולות יש 2 דרכים, עבור 3 קופסאות ו-3 אשכולות יש 6 דרכים (ועבור 0 קופסאות ו-0 אשכולות דרך אחת באופן ריק), ומשם אפשר לחשב לפי הנוסחה, נקבל $f(6) = 73, f(8) = 400, f(10) = 2177$.