



שאלה 1 (15 נקודות)

גברת פינק מבקרת בחנות מגנטים.

בחנות יש מגנטים של ספרות שונות, ומלאי המגנטים של כל ספרה בלתי מוגבל. למגנט בכל צורת ספרה יש מחיר משלו.

לגברת פינק יש בארנק סכום כסף מסוים, והיא רוצה לקנות מגנטים כך שתוכל להרכיב מהם מספר גדול ככל הניתן. שימו לב שהיא חייבת להשתמש בספרות שהיא קנתה כמו שהן, כלומר היא לא יכולה לסובב 9 ולהפוך אותו ל-6 וכו', כל ספרה חייבת להיות בשימוש שאליו היא מיועדת.

גברת פינק לא חייבת להשתמש בכל כספה עבור המגנטים. בנוסף, היא יכולה לרכוש מגנט של ספרה מסוימת מספר פעמים.

כדי להרכיב את המספר הגדול ביותר הפעולה היחידה שהיא יכולה לעשות היא להניח את הספרות שהיא רכשה בסדר שהיא בוחרת כדי להרכיב מספר מהספרות הללו (שהיא לא יכולה ליצור פעולות חשבון כגון חזקות וכו', אין התחכמויות בפתרון).

להלן סכום כסף שגברת פינק מקצה לרכישת מגנטים ומחיר של כל אחת מהספרות.

מה המספר הגדול ביותר שגברת פינק תוכל להרכיב (לאחר שהחליטה אילו ספרות עליה לרכוש וגם באיזה סדר לסדר אותן), אם:

א. יש לה 100 ₪, ועלויות הספרות הן:

ספרה	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
מחיר	11₪	12₪	20₪	12₪	13₪	19₪	14₪	12₪	15₪	13₪

ב. יש לה 100 ₪, ועלויות הספרות הן:

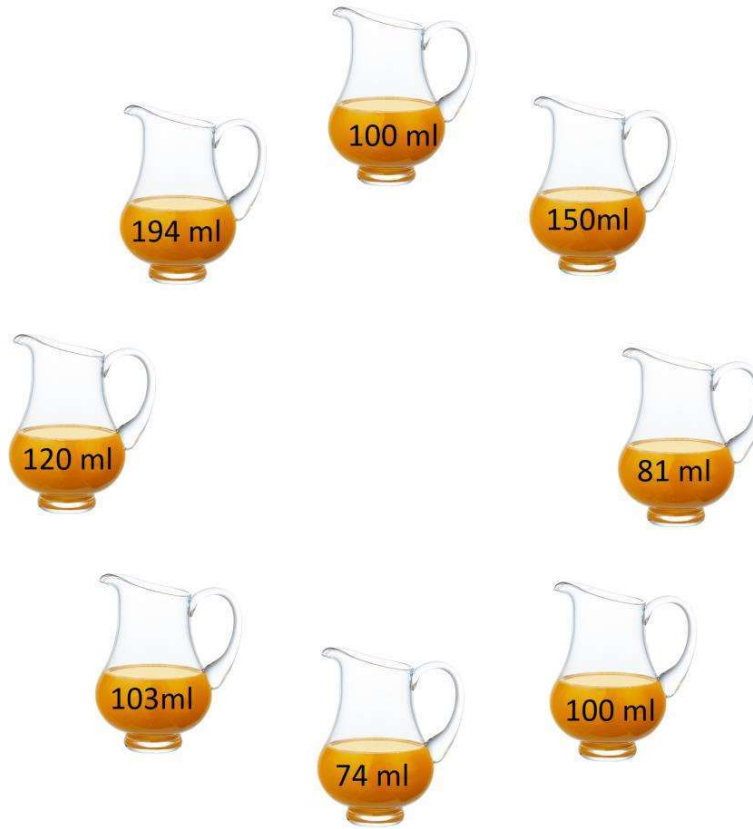
ספרה	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
מחיר	10₪	14₪	20₪	12₪	13₪	19₪	14₪	15₪	16₪	14₪

ג. יש לה 2022 ₪, ועלויות הספרות הן:

ספרה	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
מחיר	331₪	332₪	420₪	337₪	330₪	331₪	500₪	341₪	350₪	400₪

שאלה 2 (20 נקודות)

לגאלה יש 8 קנקני פלא. כל קנקן פלא בעל קיבולת אינסופית של נוזלים. גאלה סידרה במעגל את שמונת הקנקנים עם כמות מיץ כלשהי בכל אחד מהם, כמתואר באיור הבא:



בכל דקה גאלה מוסיפה במקביל לכל קנקן כמות מיץ ששווה לסכום כמות המיץ ב-2 הקנקנים הסמוכים לו (בקנקן הסמוך מימין ובקנקן הסמוך משמאל). קודם היא מחשבת כמה מיץ להוסיף לכל אחד מהקנקנים ואז מוסיפה כמות זו (למשל, בדקה הראשונה, לקנקן העליון בצירוף יתווספו 344 מ"ל (ml) מיץ ולזה שמימין באיור יתווספו 181 מ"ל מיץ).

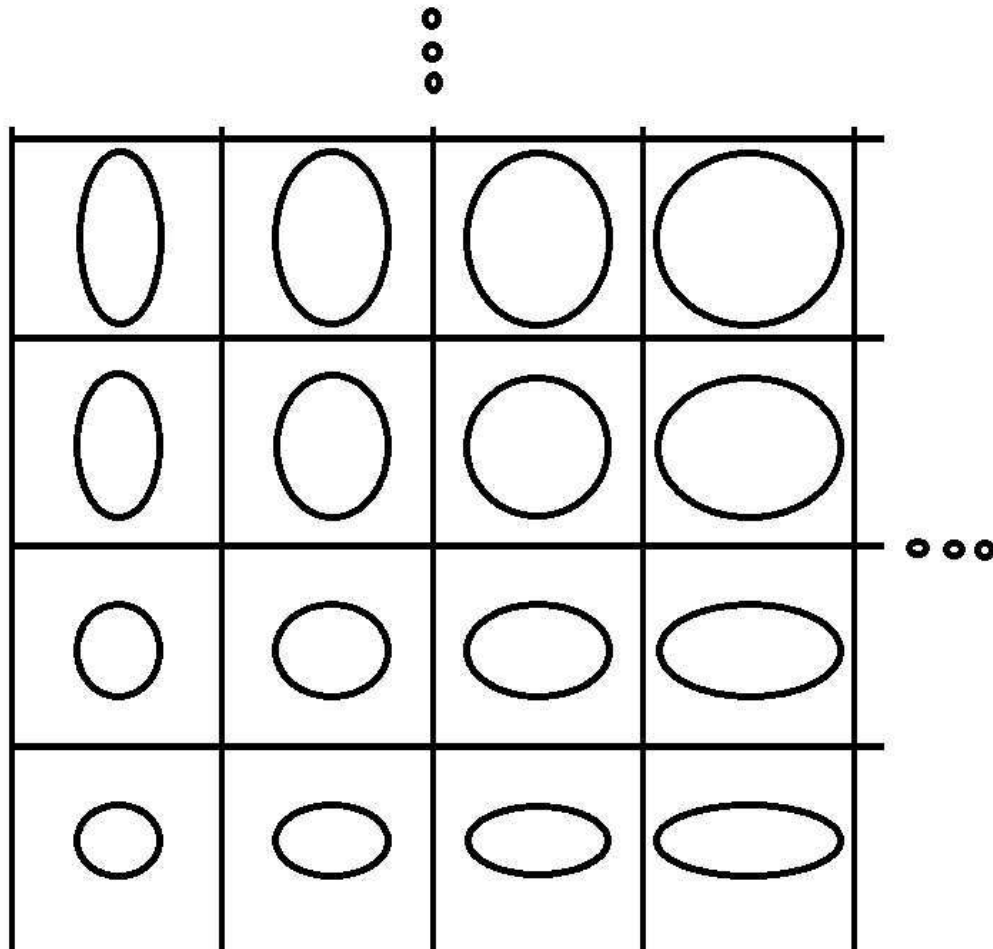
א. מה תהיה כמות המיץ הכוללת במ"ל (סכום הכמויות בכל הקנקנים) אחרי 10 דקות? (רמז לבדיקה: סכום הספרות בתשובתכם צריך להיות 36)

ב. מה תהיה ספרת האחדות של כמות המיץ הכוללת אחרי 2022 דקות?

ג. מה תהיה ספרות האחדות של כמות המיץ הכוללת אחרי 10^{2022} דקות?

שאלה 3 (20 נקודות)

אדון חרמון אוהב לצייר מלונים בעזרת שבלונות. השבלונה האהובה עליו, שאיתה הוא נהג לצייר מלונים כל בוקר, נשברה, ועכשיו הוא רוצה לקנות שבלונה זחה. כידוע לכול, למלונים צורה אליפטית. בחנות יש שבלונות שונות, כל שבלונה ניתן לתאר באמצעות 2 פרמטרים – אורך וגובה. השבלונות מסודרות בכוורת ריבועית, כך שבכל שורה כל השבלונות בעלות אותו הגובה, והן ממוינות על פי הרוחב של כל שבלונה - מהקטנה לגדולה (הצרה ביותר בצד שמאל, והרחבה ביותר בצד ימין). בכל עמודה כל השבלונות בעלות אותו הרוחב, והן ממוינות על פי הגובה של כל שבלונה מהקטנה לגדולה (הנמוכה ביותר למטה, והגובה ביותר למעלה). אין 2 שבלונות באותה השורה בעלות אותו הרוחב, או 2 שבלונות באותה העמודה בעלות אותו הגובה:



אדון חרמון יודע שבהכרח קיימת שבלונה אשר זהה לזו שהוא מחפש והיא נמצאת בתא כלשהו בכוורת, אבל הוא לא יודע לזהות אותה בעין.

הוא הביא ציור שצייר בעבר עם השבלונה שהוא מחפש, והוא יכול לקחת שבלונה כלשהי מהכוורת ולבדוק האם היא מתאימה לציור. כך הוא ידע האם השבלונה שהוא בודק בדיוק באורך הנכון, האם היא ארוכה יותר או האם היא קצרה יותר. בנוסף, הוא ידע האם היא בדיוק ברוחב הנכון, האם היא



ארוכה מידי או האם היא קצרה מידי. בעצם, עבור כל השוואה בין הציור מהבית לבין שבלונה בחנות אדון חרמון מקבל שתי תשובות. תשובה לגבי האורך (אחת מהאפשרויות הבאות: ארוכה יותר, קצרה יותר, שוות), ותשובה לגבי הרוחב (אחת מהאפשרויות הבאות: רחבה יותר, רחבה פחות, שוות). לאדון חרמון אסור לסובב את השבלונות.

כמה שבלונות מהכוורת אדון חרמון יצטרך לבדוק, במקרה הגרוע, לפני שידע בוודאות להגיד בדיוק באיזו תא יש את השבלונה שהוא מחפש:

- א. אם בכוורת 7 שורות ו-7 עמודות
 - ב. אם בכוורת 2022 שורות ו-2022 עמודות
 - ג. בסעיף זה לאדון חרמון מותר לבדוק לכל היותר 25 שבלונות. מה מספר השורות המירבי שיכול להיות בכוורת כך שאדון חרמון יוכל לדעת בוודאות באיזה תא השבלונה שהוא רוצה נמצאת?
- שימו לב כי אדון חרמון מאוד חכם ויעשה את הבדיקות באופן הכי טוב שאפשר. בנוסף, שימו לב כי הכוורת ריבועית – מספר השורות בה זהה למספר העמודות בה.



שאלה 4

לסבתא סמית אוסף של קופסאות עם דובדבנים. אין שתי קופסאות עם אותו מספר דובדבנים. על כל קופסה יש מדבקה עם מספר מזהה ייחודי, כך שסבתא סמית יודעת להבדיל ביניהן.

לא ניתן לראות דרך הקופסאות את מספר הדובדבנים בהן, ואסור לה לפתוח את הקופסאות.

לסבתא סמית יש מאזניים שבכל צד שלהן היא יכולה לשים קופסה אחת בלבד, וכך לדעת באיזה צד הקופסה הכבדה יותר. למזלה של סבתא סמית, המשקלים של כל הדובדבנים זהים, כך שהקופסה הכבדה יותר מכילה יותר דובדבנים.

סבתא סמית ביצעה מספר שקילות בעזרת המאזניים שלה ורשמה את התוצאות (המספר המזהה של הקופסה הקלה והכבדה מבין השתיים באותה שקילה), אבל עכשיו המאזניים נשברו והיא לא יכולה לבצע שקילות נוספות. אין לה גם דרך להשוות משקלים של קופסאות בלי המאזניים (היא לא מרגישה את ההבדלים), המידע היחיד שיש לה הוא המידע מהשקילות שתיעדה, והמידע שניתן להסיק מהן.

סבתא סמית רוצה לבנות משלוח מנות. משלוח מנות מורכב מקופסה אחת או יותר של דובדבנים, שמסודרים בשורה, כך שבכל קופסה יש פחות דובדבנים מקופסה שמימינה.

לסבתא סמית אסור לבנות משלוח מנות אם היא לא בטוחה ב-100% שהתכונה הנ"ל מתקיימת. בנוסף, מותר לה להרכיב רק משלוח מנות אחד (היא לא יכולה להרכיב משלוחי מנות נוספים גם אם אין חפיפה בקופסאות).

כמה אופציות שונות למשלוח מנות סבתא סמית יכולה להרכיב, כאשר:

א. יש לה 3 קופסאות דובדבנים ותוצאות השקילות שלה הן:

מספר השקילה	מספר מזהה של הקופסה הכבדה יותר בשקילה	מספר מזהה של הקופסה הקלה יותר בשקילה
שקילה ראשונה	1	2
שקילה שנייה	1	3

ב. יש לה 10 קופסאות דובדבנים ותוצאות השקילות שלה הן:

מספר השקילה	מספר מזהה של הקופסה הכבדה יותר בשקילה	מספר מזהה של הקופסה הקלה יותר בשקילה
שקילה ראשונה	1	2
שקילה שניה	2	3
שקילה שלישית	3	4
שקילה רביעית	4	5
שקילה חמישית	5	6
שקילה שישית	6	7
שקילה שביעית	7	8
שקילה שמינית	8	9
שקילה תשיעית	9	10

ג. יש לה 5 קופסאות דובדבנים ותוצאות השקילות שלה הן:

מספר השקילה	מספר מזהה של הקופסה הכבדה יותר בשקילה	מספר מזהה של הקופסה הקלה יותר בשקילה
שקילה ראשונה	1	2
שקילה שניה	2	5
שקילה שלישית	3	4
שקילה רביעית	4	5
שקילה חמישית	1	3

ד. יש לה 10 קופסאות דובדבנים ותוצאות השקילות שלה הן:

מספר השקילה	מספר מזהה של הקופסה הכבדה יותר בשקילה	מספר מזהה של הקופסה הקלה יותר בשקילה
שקילה ראשונה	1	9
שקילה שניה	3	8
שקילה שלישית	10	4
שקילה רביעית	7	9
שקילה חמישית	9	5
שקילה שישית	2	9
שקילה שביעית	9	10
שקילה שמינית	6	7

שאלה 5

ליונתן יש טבלה בגודל 5×5 . בכל משבצת בטבלה הוא יכול להכניס או תפוח או תפוז. לא ניתן להשאיר משבצת ריקה.

הוא רוצה לשים בכל משבצת בטבלה תפוח או תפוז, כך שתהיה **בדיוק** שורה אחת עם מספר **אי-זוגי של תפוזים**, ו**בדיוק** עמודה אחת עם מספר **אי-זוגי של תפוזים** (ובכל שאר השורות והעמודות יהיה מספר זוגי של תפוזים).

א. כמה סידורים שונים של הפירות בטבלה קיימים כך שהתכונה הזו תתקיים? (רמז לבדיקה: סכום הספרות בתשובה הוא 22)

ב. כמה סידורים שונים כאלו יכולים להיות בטבלה בגודל 7×7 ?

שני סידורים יחשבו שונים אם קיימת משבצת שבאחד מהסידורים יש בה תפוח ובשני יש בה תפוז (ואסור לטובב או לשקף את הטבלה).