<u>האולימפיאדה במדעי המחשב, שלב א', 2022</u>

<u>מועד א'</u>

<u>שאלה 1</u>

כמובן שאין סיבה שהספרה המשמעותית ביותר (השמאלית) תהיה 0.

מעבר לכך, תמיד עדיף שיהיו יותר ספרות מאשר שספרה כלשהי תהיה גדולה יותר (999 < 1000 וכו').

האלגוריתם יהיה לבדוק מה מספר הספרות המירבי שאפשר לקבל כשהספרה השמאלית אינה 0 (כלומר להוריד מהסכום שיש לגברת פינק את הספרה הכי זולה שאינה 0, ולבדוק את המנה של מה שנשאר בספרה הכי זולה באופן כללי, כשמעגלים את החלוקה כלפי מטה), ואז לקחת את הספרה הכי גבוהה שאפשר בכל תור כששארית הסכום תספיק לשארית הספרות שרוצים להרכיב במספר.

א. יש לה 100₪, ועלויות הספרות הן:

ספרה	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
מחיר	13₪	15₪	12₪	14₪	19₪	13₪	12₪	20₪	12₪	11₪

הספרה הכי זולה היא 11, לכן יש לכל היותר 9 ספרות. הספרה הזו היא 0, אז נרצה שהספרה הראשונה תהיה ספרה אחרת. אם ניקח סיפרה שעולה 12 ₪, נישאר עם 88 ₪ = 11*8, אז אפשר יהיה עדיין ליצור מספר עם 9 ספרות. כל ספרה שאינה 0 יקרה יותר מ-11 ₪, ואם ניקח ספרה שעולה יותר מ-12 ₪ לא נוכל להרכיב מספר של 9 ספרות (לא ישאר לנו כסף לעוד 8 ספרות). הספרה הכי גדולה שעולה 12 ₪ היא 7. לכן התשובה היא 700,000,000.

ב. יש לה 100₪, ועלויות הספרות הן:

ספרה	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
מחיר	14₪	16₪	15₪	14₪	19₪	13₪	12₪	20₪	14₪	10₪

הספרה הכי זולה שאינה 0 עולה 12 ₪ , ונשאר עם 88 ₪ שמספיקים ל-8 ספרות נוספות (הספרה הכי זולה בכללי עולה 10 ₪), לכן ניתן להרכיב מספר עם 9 ספרות סה"כ.
אם נשים 9 בהתחלה נשאר עם 86 ₪ , מספיק לעוד 9 ספרות.
אם נשתמש בעוד 9 נשאר עם 72 ₪, מספיק לעוד 8 ספרות.
הספרה הבאה יכולה לעלות לכל היותר 12 ₪, אחרת לא ישאר לה כסף לעוד 6 ספרות, והיא תהיה 3.
לכן התשובה היא 993,000,000.

ג. יש לה 2022₪, ועלויות הספרות הן:

ספרה	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
מחיר	400₪	350₪	341₪	500₪	331₪	330₪	337₪	420₪	332₪	331₪

באותו האלגוריתם נקבל בסוף את המספר 885544.

שאלה 2 (20 נקודות)

תחילה, סכום כמויות המיץ בכל הקנקנים הוא 992 מ"ל.

נביט מה קורה לסכום כמויות המיץ בכל דקה. בכל אחד מהקנקנים הכמות המקורית נשארת, ומתווסף סכום 2 שכניו. כלומר עבור כל קנקן, כמות המיץ בו תתווסף ל-2 הקנקנים השכנים שלו. כלומר הכמות שלו פעמיים תתווסף לסכום.

אם הסכום בדקה כלשהי הוא S, בדקה הבאה הוא יהיה S+2*S, כלומר יגדל פי 3.

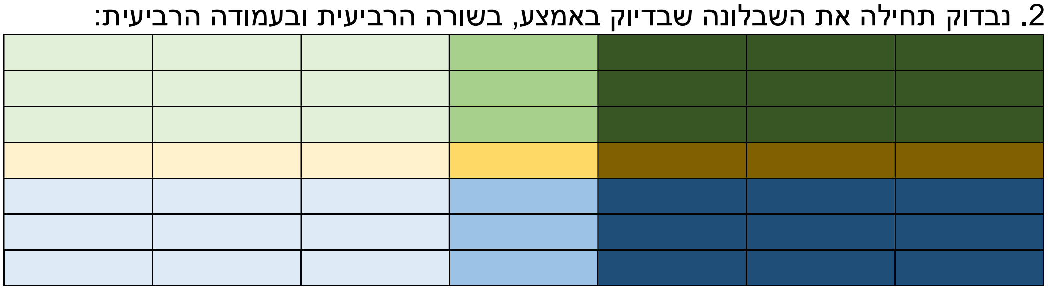
לכן, אחרי 10 דקות הסכום הכולל יהיה $922 * 3^{10} = 54,443,178$.

ספרת האחדות נעה בחוקיות קבועה: 2->6->8->4->2->6->8->4->... לכן אפשר לקבוע אותה בקלות לפי שארית החלוקה ב-4 של מספר הדקות שעברו.

אם היא 0 (כמו במקרה של 10^{2022}), הספרה היא 2. אם היא 2 (כמו אחרי 2022 דקות) הספרה היא 8.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. 2. נבדוק תחילה את השבלונה שבדיוק באמצע, בשורה הרביעית ובעמודה הרביעית:



זה יחלק את הכוורת למספק אזורים ונדע בדיוק באיזה אזור (גוון לפי הגובה והצללה לפי האורך בציור) נמצאת השבלונה המתאימה. כלומר במקרה הגרוע ביותר נישאר עם תת כוורת בגודל 3*3, שבה גם כן נוכל לבדוק את השבלונה שבדיוק באמצע ולאחר מכן לדעת היכן נמצאת השבלונה המתאימה 😊.

ב. 10. בעצם כל בדיקה מחלקת את הכוורת ל-9 איזורים, ומגלה לנו באיזה איזור נמצאת השבלונה. המטרה היא להגיע כמה שיותר מהר במקרה הגרוע לאיזור בגודל 1*1 (שזה המיקום המדויק של השבלונה). במקרה הגרוע כמובן נשאר עם האיזור הכי גדול, ולכן נרצה שהוא יהיה קטן ככל הניתן בכל תור. את זה משיגים כשבוחרים את המשבצת שבדיוק באמצע (אם האורך אי זוגי, או אחת מהאמצעיות אם האורך זוגי).

אם הכוורת באורך N, בתור הבא נשאר עם אורך $\left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil$, כשהסוגריים מסמלות עיגול כלפי מעלה. כלומר לפי הבדיקות נשאר עם האיזורים:

$$2022 \rightarrow 1011 \rightarrow 505 \rightarrow 252 \rightarrow 126 \rightarrow 63 \rightarrow 31 \rightarrow 15 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

כלומר 10 בדיקות.

ג. עם בדיקה אחת אפשר לכל היותר לוח 3*3. אם אפשר ב-N בדיקות למצוא את השבלונה לכוורת של a*a, ב-N+1 בדיקות אפשר לכוורת של (2a+1)*(2a+1).

אפשר לעשות 25 חישובים אבל ממש לא חובה, אפשר לשים לב לחוקיות – שב-N בדיקות אפשר לפתור לכוורת של $2^{N+1}-1$ שורות (זה מתקיים עבור בדיקה אחת - $2^2-1=3$, וגם מתקיים $2*(2^{N+1}-1)+1=2^{N+2}-1$).
לכן התשובה היא $2^{26}-1=67108863$.

שאלה 4

בכל סעיף נוכל לצייר את את הקופסאות וחיצים בין קופסה שיודעים שכבדה מקופסה אחרת (ישירות או בעקיפין – אם ידוע ש-1 כבדה מ-2 ו-2 כבדה מ-3, ידוע גם ש-1 כבדה מ-3).

לאחר מכן, לכל קופסה נוכל לחשב את מספר משלוח המנות שהיא הקופסה הכי קלה בהם – או שהיא הקופסה היחידה במשלוח המנות (אפשרות אחת), או שקופסה שידוע (או הסקנו) שקלה יותר נמצאת לפניה – כלומר בלעדיה יש משלוח מנות חוקי שמסתיים בקופסה שיש חץ ממנה לקופסה הנוכחית. מכיוון שבאף סעיף אין מעגלים של חצים, אפשר להתחיל לחשב מקופסאות שלא נכנסים אליהן חצים ולהמשיך בסדר של החצים. בסעיף ב' קיים גם פתרון נוסף (מוסבר בו).

א. יש לה 3 קופסאות דובדבנים. תוצאות השקילות שלה הן:

מספר השקילה	1	2
הקופסה הכבדה יותר בשקילה	1	1
הקופסה הקלה יותר בשקילה	2	3

לא ידוע על קופסה שכבדה מקופסה 1, ולכן יש רק משלוח מנות אחד שידוע שהיא הכבדה ביותר בו.
עבור קופסה 2 ידוע רק שקופסה 1 כבדה ממנה, ולכן יש 2 אפשרויות. כנ"ל לגבי 3.
סה"כ קיבלנו 1+2+2 = 5 אפשרויות.

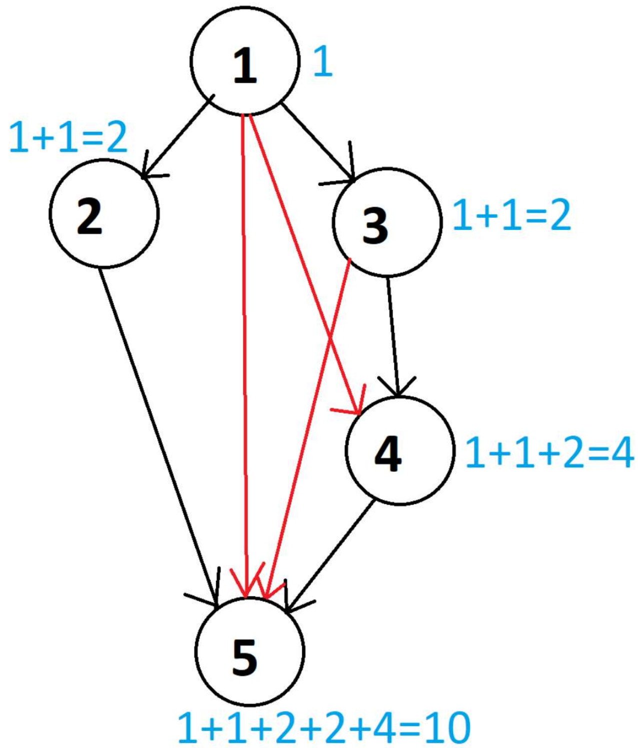
ב. יש לה 10 קופסאות דובדבנים. תוצאות השקילות שלה הן:

מספר השקילה	1	2	3	4	5	6	7	8	9
הקופסה הכבדה יותר בשקילה	1	2	3	4	5	6	7	8	9
הקופסה הקלה יותר בשקילה	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ידוע ש-1 כבדה מ-2 שכבדה מ-3 וכו'. לכן ניתן לבחור כל תת קבוצה (לא ריקה) של קופסאות, וליצור ממנה בדיוק משלוח מנות אחד חוקי, כשהן מסודרות לפי הסדר.
כל קופסה יכולה או להיות במשלוח או לא – כלומר 2 אופציות לכל קופסה – או 2^10=1024 אופציות סה"כ, אבל כך ספרנו פעם אחת את האפשרות שלא יהיו קופסאות כלל במשלוח – לכן יש 1023 משלוחי מנות חוקיים.

ג. יש לה 5 קופסאות דובדבנים. תוצאות השקילות שלה הן:

מספר השקילה	1	2	3	4	5
הקופסה הכבדה יותר בשקילה	1	2	3	4	1
הקופסה הקלה יותר בשקילה	2	5	4	5	3



בשחור השקילות שנתונות – באדום היחס שאפשר להסיק מהן.
לכל קופסה מספר משלוחי המנות שהיא הכי קלה בהם הוא סכום משלוחי המנות האלו עבור קופסאות עם חיצים אליה (משלוחי מנות שהקופסה הכי קלה בהן, שהיא גם השמאלית ביותר, היא הקופסה עם החץ לנוכחית, שהוסיפו אליהם את הקופסה הנוכחית משמאל), ועוד 1 (משלוח המנות עם הקופסה הנוכחית בלבד).
סדר אפשרי לחישובים: להתחיל מ-1, ואז 2, ואז 3, ואז 4 ואז 5.

תשובה סופית: 1+2+2+4+10=19

ד. יש לה 10 קופסאות דובדבנים. תוצאות השקילות שלה הן:

מספר השקילה	1	2	3	4	5	6	7	8
הקופסה הכבדה יותר בשקילה	1	3	10	7	9	2	9	6
הקופסה הקלה יותר בשקילה	9	8	4	9	5	9	10	7

האלגוריתם כמו בסעיף הקודם, התשובה היא 62.

<u>שאלה 5</u>

ליונתן יש טבלה בגודל 5*5.

הוא רוצה לשים בכל משבצת תפוח או תפוז, כך שתהיה **בדיוק** שורה אחת עם מספר **אי-זוגי** של **תפוזים**, ו**בדיוק** עמודה אחת עם מספר **אי-זוגי** של **תפוזים** (ובכל שאר השורות והעמודות יהיה מספר זוגי של תפוזים).

א. כמה סידורים שונים של הפירות בטבלה קיימים כך שהתכונה הזו תתקיים?
ב. כמה סידורים שונים כאלו יכולים להיות בטבלה בגודל 7*7?

שני סידורים יחשבו שונים אם קיימת משבצת שבאחד מהסידורים יש בה תפוח ובשני יש בה תפוז.

אפשר לחשב בצורה הבאה:

יש 5 אפשרויות שונות לשורה שבה יהיה מספר אי-זוגי של תפוזים, ו-5 אפשרויות שונות לעמודה שבה יהיה מספר אי-זוגי של תפוזים.

נמלא את כל הפירות בשאר המקומות. יש 16 מקומות כאלו ו-2 אפשרויות לכל מקום, כלומר 2^{16} אפשרויות.

לכל שאר המקומות נשארה אופציה אחת – בכל שורה שבה יש מספר זוגי של תפוזים, מילאנו את כל המקומות חוץ מאחד. אם בשאר השורה יש מספר זוגי של תפוזים צריך לשים במקום שנותר תפוח, אחרת חייבים לשים שם תפוז. עכשיו נשארה רק משבצת אחת פנויה – המשבצת בשורה ובעמודה שבה צריך להיות מספר אי זוגי של תפוזים.

זוגיות מספר התפוזים בשורה ובעמודה של המשבצת הזו זהה – כי אם יש מספר אי-זוגי של תפוזים באופן כללי ששמנו ב-16 המשבצות שמילאנו באופן חופשי זה יהיה מספר אי-זוגי (ואז במשבצת שנשארה חייבים לשים תפוח), ואחרת זה יהיה מספר זוגי (ואז חייבים לשים שם תפוז).

כלומר לכל מילוי של 16 המשבצות שמילאנו באופן חופשי, יש דרך למלא את שאר המשבצות באופן שיקיים את התכונה של יונתן, ויש בדיוק דרך אחת כזו (כשבחרנו מראש את השורה ואת העמודה עם מספר אי-זוגי של תפוזים).

סה"כ $5 * 5 * 2^{4*4} = 1,638,400$ אפשרויות.

ללוח 7*7 באופן דומה יהיו $7 * 7 * 2^{6*6} = 3,367,254,360,064$ אפשרויות.