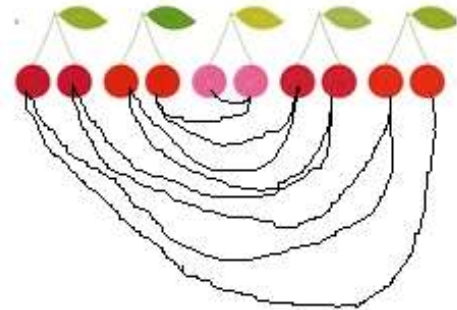


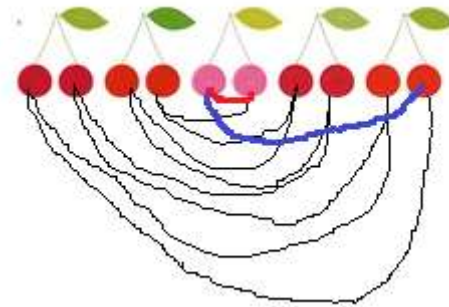
מועד א' – מפתח תשובות ותקציר הפתרונות

1. בניח רגע שהייתה רק ערימה אחת עם 113 אגסים, ושהמשחק הוא שכל שחקן בתורו לוקח 1-4, רד מתחיל, מי שאין לו תור מפסיד. המטרה של רד היא לא להגיע למצב שאחרי התור של גולדן אין אגסים בערימה, שהמצב הזה יהיה רק אחרי תור שלו. לצורך כך הוא יכול לשמור על התכונה הבאה: אחרי התור שלו מספק האגסים יתחלק ב-5, וזה לעולם לא יקרה אחרי התור של גולדן כי אם מתחילים עם מספר שמתחלק ב-5, יש לקחת מספר שמתחלק ב-5 כדי לשמור על התכונה הזו, אבל מותר לקחת רק 1-4 אגסים בתור.
- לסיכום, אסטרטגיית המשחק של רד תהיה: בתור הראשון לקחת 3 אגסים ולהשאיר 110. לאחר מכן, בכל תור: נסמן ב-x את מספר האגסים שלקח גולדן. רד יקח x-5 אגסים. כך נשמרת התכונה שאחרי תורו של רד מספר האגסים מתחלק ב-5, ואחרי תורו של גולדן זה אף פעם לא המצב, ולכן האגסים יסתיימו רק אחרי תורו של רד 😊
- ועכשיו, למשחק 2 הערימות בשאלה: הכוונה המקורית שלנו הייתה שמפסידים כש-2 הערימות מסתיימות ושם רק אחת נגמרת עדיין אפשר לקחת פירות מהשניה. במקרה הזה האסטרטגיה בערימה הראשונה היא כמו שתיארנו, ובאופן דומה בערימה השניה רד צריך לשמור שהמספר יתחלק ב-4, ולכן לקחת תפוז אחד, והתשובה הייתה אמורה להיות 13 בלבד.
- אבל – הייתה לנו כאן שגיאה בניסוח השאלה, וכמו שניסחנו המשחק נגמר כשאחת הערימות מסתיימת, ומכיוון שרד יכול לדאוג שערימת האגסים תיגמר לפני ערימת התפוזים, כל עוד הוא לוקח 3 אגסים בתור הראשון יש לו אסטרטגיית ניצחון, וזה לא באמת משנה כמה תפוזים הוא יקח.
2. א. 17 ב. 115. הבחנת המפתח היא שכדי שהמסלול יהיה קצר ככל הניתן אסור ללכת "אחורה", כלומר כל הצעדים יהיו או שמאלה או למטה. לכן, מספר המסלולים הקצרים ביותר לכל צומת נגיש זה הסכום בין מספר המסלולים הקצרים ביותר לצומת שמעליו ולצומת שמימינו, בהנחה שניתן להגיע אליו מ-2 כיוונים אלו, או מספר המסלולים מהכיוון היחיד (מבין 2 אלו) שהוא נגיש ממנו אם לא. אפשר לפתור הדרגתית את השאלה לכל צומת עד שנקבל את התשובה המלאה עבור נקודה ב' – קודם נספור את מספר המסלולים הקצרים ביותר לכל צומת בשורה הראשונה של הצמתים מימין לשמאל, ואז בשניה וכו'...
3. א. 2 ב. 4 ג. 5. נעבוד בגישה חמדנית. אם לא צריך לשנות בכלל סימן של מספרים, כל הסכומים יצאו חיוביים, אז נתחיל לסכום מההתחלה לסוף ונעצור לחשוב רק אם נקבל סכום שלילי. לא קיבלנו? מצוין, אז לא צריך לשנות שום סימן. קיבלנו סכום שלילי? עכשיו אנחנו יודעים בוודאות שיש לשנות סימן של מספר אחד לפחות ברישא הראשונה שבה הסכום הוא שלילי (בניח, אם נתקלנו בסכום שלילי בפעם הראשונה באיבר ה-k, חייבים לשנות סימן למספר כלשהו מבין k הראשונים). אבל איזה סימן נרצה לשנות? את הסימן של המספר הקטן ביותר עד כה! (כלומר שלילי עם ערך מוחלט גדול ביותר). כי אם בכל מקרה הופכים סימן של עוד מספר, זה ההיפוך שיעזור לנו לשמור על סכום גדול ככל הניתן ויוריד את הסיכוי לסכום שלילי בהמשך. עכשיו חוזרים על הפעולה שוב באותה הצורה, עד שמקבלים שסכום כל הרישות אכן חיובי. מספר השינויים שעשינו הוא כמובן המספר הקטן ביותר האפשרי.
4. 4999. הפתרון הוא בגישה חמדנית, בכל פעם ללכת לדובדבן הרחוק ביותר שנשאר. השאלה היא רק איפה להתחיל, והתשובה היא שחייבים להתחיל מהאמצע!

קל להמחיש זאת בציור: נניח לרגע שיש רק 10 דובדבנים. אם מתחילים מההתחלה והולכים בכל פעם לדובדבן הרחוק ביותר שנשאר, מקבלים מין צורת חנוכיה וסכום המרחקים הוא 45 (סכום המספרים מ-1 עד 9):



אבל אם נתחיל מהאמצע, נחליף קטע באורך 1 (האדום) של הליכה בין 2 דובדבנים סמוכים בקטע באורך 5 (הכחול), ונקבל סה"כ מרחק 49:



נשאיר את הוכחת האופטימליות לכם 😊 (ובאולימפיאדה במדעי המחשב בסוף לא חייבים להוכיח, אבל חשוב להשתכנע שהפתרון אכן נכון!)

5. א. 1073741824 ב. 268451840.

סעיף א' – כל פיצול מחלק כל צורה ל-4 צורות קטנות יותר, לכן התשובה היא 4 בחזקת מספר הפיצולים.

סעיף ב' – יש להסתכל על 4 התצורות האפשריות של הצורה (קל לסמן אותן באותיות שונות לצורך כך), ולראות בכל פיצול כמה צורות מכל סוג נוצרות מכל סוג של צורה במקור. אם מחשבים את המספרים ל-3 עד 4 פיצולים, ניתן כבר לראות את החוקיות, ולהבין שהתשובה הסופית היא $4^{15} + 2^{15}$

ניתן להוכיח את הנכונות בקלות באינדוקציה מהנוסחה עצמה, אבל אין צורך בכך.